

Антенна теорія і основи електромагнетизму

Український модуль, format-checked

Peeter Joot antenna notes, Ukrainian translation fragments

2026-06-01

Зміст

1. Основи рівнянь Максвелла

В інженерній практиці поля

- $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ — напруженість електричного поля [V/m] (вольт/метр)
- $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$ — напруженість магнітного поля [A/m] (ампер/метр)

називаються *первинними* полями, тоді як

- $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ — електрична індукція (або вектор зміщення) [C/m] (кулон/метр)
- $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ — магнітна індукція [Wb/m²] (вебер/квадратний метр)

називаються *індукованими* полями. Струми та заряди:

- $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ — густина електричного струму [A/m²] (ампер/квадратний метр)
- $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ — густина магнітного струму [V/m²] (вольт/квадратний метр)
- $q_e(\mathbf{x}, t)$ — об'ємна густина електричного заряду [C/m³] (кулон/кубічний метр)
- $q_m(\mathbf{x}, t)$ — об'ємна густина магнітного заряду [Wb/m³] (вебер/кубічний метр)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{M} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = q_e \quad (1.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = q_m. \quad (1.1d)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{M} - j\omega \mathbf{B} \quad (1.2a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \mathbf{D} \quad (1.2b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.2c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m. \quad (1.2d)$$

1.1. Перетворення двоїстості (duality transformation).

В обговоренні монополів Дірака, у [?] §6.12, вводиться *перетворення двоїстості* (duality transformation): електричне і магнітне поля формуються через поворот, який змішує іншу пару електричних і магнітних полів. У одиницях SI це перетворення:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \eta \mathbf{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}' \\ \eta \mathbf{H}' \end{bmatrix}, \quad (1.3a)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{B}/\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}' \\ \mathbf{B}'/\eta \end{bmatrix}, \quad (1.3b)$$

де $\eta = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$. Читачеві лишається як вправа показати, що застосування цього перетворення до рівнянь Максвелла

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_e/\epsilon_0, \quad (1.4a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \rho_m/\mu_0, \quad (1.4b)$$

$$-\nabla \times \mathbf{E} - \partial_t \mathbf{B} = \mathbf{J}_m, \quad (1.4c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{D} = \mathbf{J}_e, \quad (1.4d)$$

визначає аналогічне співвідношення між джерелами. Це перетворення рівнянь Максвелла:

$$\nabla \cdot (\cos \theta \mathbf{E}' + \sin \theta \eta \mathbf{H}') = \rho_e/\epsilon_0, \quad (1.5a)$$

$$\nabla \cdot (-\sin \theta \mathbf{E}'/\eta + \cos \theta \mathbf{H}') = \rho_m/\mu_0, \quad (1.5b)$$

$$-\nabla \times (\cos \theta \mathbf{E}' + \sin \theta \eta \mathbf{H}') - \partial_t (-\sin \theta \eta \mathbf{D}' + \cos \theta \mathbf{B}') = \mathbf{J}_m, \quad (1.5c)$$

$$\nabla \times (-\sin \theta \mathbf{E}'/\eta + \cos \theta \mathbf{H}') - \partial_t (\cos \theta \mathbf{D}' + \sin \theta \mathbf{B}'/\eta) = \mathbf{J}_e. \quad (1.5d)$$

Невелика перестановка членів дає:

$$\begin{bmatrix} \eta \rho_e \\ \rho_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \rho'_e \\ \rho'_m \end{bmatrix}, \quad (1.6a)$$

$$\begin{bmatrix} \eta \mathbf{J}_e \\ \mathbf{J}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \mathbf{J}'_e \\ \mathbf{J}'_m \end{bmatrix}. \quad (1.6b)$$

Наприклад, при $\rho_m = \mathbf{J}_m = 0$ і $\theta = \pi/2$ перетворення джерел дає

$$\begin{aligned} \rho'_e &= 0, \\ \mathbf{J}'_e &= 0, \\ \rho'_m &= \eta \rho_e, \\ \mathbf{J}'_m &= \eta \mathbf{J}_e, \end{aligned} \quad (1.7)$$

і рівняння Максвелла мають тоді лише магнітні джерела:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}' = 0, \quad (1.8a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}' = \rho'_m/\mu_0, \quad (1.8b)$$

$$-\nabla \times \mathbf{E}' - \partial_t \mathbf{B}' = \mathbf{J}'_m, \quad (1.8c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}' - \partial_t \mathbf{D}' = 0. \quad (1.8d)$$

Щодо цього співвідношення Джексон зазначає: “Інваріантність рівнянь електродинаміки відносно перетворень двоїстості показує, що говорити про частинку, яка має електричний заряд, але не магнітний — це питання конвенції.” Цей коментар цікавий і вартий додаткового обмірковування.

2. Параметри антен і дальня зона

2.1. Вектор Пойнтінга.

Вектор Пойнтінга записано в незвичній формі

$$\mathbf{W} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (2.1)$$

Я готовий змиритись з іншим символом (тобто не \mathbf{S}) для вектора Пойнтінга, але звик бачити множник $c/(4\pi)$ ([?], [?]). Щось схоже пам'ятав і в SI, тому був дещо здивований, не побачивши тут.

За [?], це щось — це μ_0 :

$$\mathbf{W} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (2.2)$$

Зауважимо, що використання \mathbf{H} замість \mathbf{B} усуває потребу в $1/\mu_0$, бо $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ (за припущення лінійного середовища без намагнічування).

2.2. Типова інтенсивність випромінювання в дальній зоні.

Згадувалось, що

$$\begin{aligned} U(\theta, \phi) &= \frac{r^2}{2\eta_0} |\mathbf{E}(r, \theta, \phi)|^2 \\ &= \frac{1}{2\eta_0} (|E_\theta(\theta, \phi)|^2 + |E_\phi(\theta, \phi)|^2), \end{aligned} \quad (2.3)$$

де власна імпеданс вільного простору

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \\ &= 377 \Omega. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Щоб зрозуміти, звідки це береться, розгляньмо радіальні розв'язки в дальній зоні для задач електричного і магнітного диполя (з [?]):

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r} \cos(\omega t - kr) \hat{\theta}, \\ \mathbf{B} &= -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c} \frac{\sin \theta}{r} \cos(\omega t - kr) \hat{\phi}, \end{aligned} \quad (2.5a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c} \frac{\sin \theta}{r} \cos(\omega t - kr) \hat{\phi}, \\ \mathbf{B} &= -\frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c^2} \frac{\sin \theta}{r} \cos(\omega t - kr) \hat{\theta}. \end{aligned} \quad (2.5b)$$

У жодному з випадків немає компоненти у напрямку поширення, і в обох (з $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$):

$$\begin{aligned} |\mathbf{H}| &= \frac{|\mathbf{E}|}{\mu_0 c} \\ &= |\mathbf{E}| \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \\ &= \frac{1}{\eta_0} |\mathbf{E}|. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Рис. 2.1: Методи побудови графіків для полів та інтенсивностей.

```
rcap = {Cos[#], Sin[#]} & ;
scap = {Sin[#1] Cos[#2], Sin[#1] Sin[#2], Cos[#1]} & ;
ParametricPlot[ f[$r_0$, $\theta$, 0] rcap, {$\theta$, 0, Pi}]
ParametricPlot3D[ f[$r_0$, $\theta$, $\phi$] scap, {$\theta$, 0, Pi}, {$\phi$, 0, 2 Pi}]
```

Знаки \mathbf{E} проти \mathbf{B} у ?? та ?? визначаються співвідношенням у дальній зоні $\mathbf{E} = c\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{r}}$ (див. (??) [?]). Наслідок цієї залежності — вектор Пойнтінга буде радіальним (показано нижче).

Суперпозиція фазорів таких дипольних полів у дальній зоні має вигляд

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{r} \left(E_\theta(\theta, \phi) \hat{\boldsymbol{\theta}} + E_\phi(\theta, \phi) \hat{\boldsymbol{\phi}} \right), \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{rc} \left(E_\theta(\theta, \phi) \hat{\boldsymbol{\theta}} - E_\phi(\theta, \phi) \hat{\boldsymbol{\phi}} \right),\end{aligned}\tag{2.7}$$

з відповідним усередненим у часі вектором Пойнтінга

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{\text{сеп}} &= \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}^* \\ &= \frac{1}{2\mu_0 cr^2} \left(E_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + E_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \right) \times \left(E_\theta^* \hat{\boldsymbol{\theta}} - E_\phi^* \hat{\boldsymbol{\phi}} \right) \\ &= \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}} \times \hat{\boldsymbol{\phi}}}{2\mu_0 cr^2} \left(|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2 \right) \\ &= \frac{\hat{\mathbf{r}}}{2\eta_0 r^2} \left(|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2 \right),\end{aligned}\tag{2.8}$$

що підтверджує ?? для суперпозиції полів електричного та магнітного диполів. Імовірно, це можна показати і для загальніших полів.

2.3. Графіки полів.

Можна будувати графіки полів або інтенсивності (або їхні дБ-логарифмічні графіки). У [?] зазначено, що при наявності r -залежності такі графіки будуються розглядом значень при фіксованому r .

Графіки полів концептуально найпростіші, оскільки вектор параметризує поверхню. Будь-яке таке радіальне поле з модулем $f(r, \theta, \phi)$ можна побудувати в Mathematica у площині $\phi = 0$ при $r = r_0$ або в 3D (також при $r = r_0$) кодом, наведеним у ??.

Графіки інтенсивності можна будувати тим самим кодом, лише інтерпретація інша: поверхня представляє не значення радіальної векторної функції, а модуль скалярної функції $f(r_0, \theta, \phi)$.

Параметрично побудовано в площині поверхні для $U = \cos \theta, \cos^2 \theta$ та $U = \sin \theta, \sin^2 \theta$ у ?? і ??.

рисунки пропущено: Косинусоїдальні та синусоїдальні інтенсивності випромінювання.

Тривимірні візуалізації $U = \sin^2 \theta$ та $U = \cos^2 \theta$ можна знайти у ??. Навіть для таких простих функцій вони виглядають доволі ефектно.

рисунки пропущено: Квадратні синусоїдальна та косинусоїдальна інтенсивності випромінювання.

2.4. дБ проти дБі.

дБі використовують для позначення підсилення відносно “ізотропного” випромінювача. Деталі див. [?].

2.5. Тригонометричні інтеграли.

tab:chapter2Notes:4

n	1	2	3	4	5	6	7
	1	$\pi/4$	$2/3$	$3\pi/16$	$8/15$	$5\pi/32$	$16/35$

tab:chapter2Notes:5

n	1	2	3	4	5	6	7
	2	$\pi/2$	$4/3$	$3\pi/8$	$16/15$	$5\pi/16$	$32/35$

tab:chapter2Notes:6

n	1	2	3	4	5	6	7
	0	$\pi/2$	0	$3\pi/8$	0	$5\pi/16$	0

2.6. Вектори поляризації.

Текст вводить вектори поляризації $\hat{\rho}$, але не записує їхню форму явно. Розгляньмо плоскохвильове поле виду

$$\mathbf{E} = E_x e^{j\phi_x} e^{j(\omega t - kz)} \hat{\mathbf{x}} + E_y e^{j\phi_y} e^{j(\omega t - kz)} \hat{\mathbf{y}}. \quad (2.9)$$

Спрямованість цього фазора в площині x, y можна записати як

$$\boldsymbol{\rho} = E_x e^{j\phi_x} \hat{\mathbf{x}} + E_y e^{j\phi_y} \hat{\mathbf{y}}, \quad (2.10)$$

тож

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\rho} e^{j(\omega t - kz)}. \quad (2.11)$$

Розкладаючи напрямок і модуль на множники:

$$\boldsymbol{\rho} = |\mathbf{E}| \hat{\rho}, \quad (2.12)$$

фазор можна виразити як

$$\mathbf{E} = \hat{\rho} |\mathbf{E}| e^{j(\omega t - kz)}. \quad (2.13)$$

Наприклад, при $E_x = E_y$ і $\phi_x = 0$ маємо

$$\hat{\rho} = \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} e^{j\phi_y}. \quad (2.14)$$

Демонстрація геометрії. Огляньмо, як загальний поляризований фазор поля приводить до лінійної, кругової та еліптичної геометрії.

Найзагальніше поле, поляризоване в площині x, y , має вигляд

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= (\hat{\mathbf{x}}a e^{j\alpha} + \hat{\mathbf{y}}b e^{j\beta}) e^{j(\omega t - kz)} \\ &= (\hat{\mathbf{x}}a e^{j(\alpha-\beta)/2} + \hat{\mathbf{y}}b e^{j(\beta-\alpha)/2}) e^{j(\omega t - kz + (\alpha+\beta)/2)}.\end{aligned}\quad (2.15)$$

Винесення середнього фазового кута допомагає (інакше вирази стають громіздкими).

Нехай $\mathbf{E} = \text{Re } \mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}}x + \hat{\mathbf{y}}y$, $\theta = \omega t + (\alpha + \beta)/2$, $\phi = (\alpha - \beta)/2$, тоді

$$\mathbf{E} = (\hat{\mathbf{x}}a e^{j\phi} + \hat{\mathbf{y}}b e^{-j\phi}) e^{j\theta}. \quad (2.16)$$

Координати тепер зчитуються прямо:

$$\frac{x}{a} = \cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \theta, \quad (2.17a)$$

$$\frac{y}{b} = \cos \phi \sin \theta + \sin \phi \cos \theta, \quad (2.17b)$$

або в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} x/a \\ y/b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Мета — усунути всі залежності від θ (тобто від часу), перетворивши параметричне співвідношення на конічну форму. Якщо припустити, що ні $\cos \theta$, ні $\sin \theta$ не дорівнюють нулю (ці випадки спеціальні й ведуть до лінійної поляризації), то інвертування матриці дозволяє усунути залежність від θ :

$$\frac{1}{\sin(2\phi)} \begin{bmatrix} \sin \phi & \sin \phi \\ -\cos \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x/a \\ y/b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Підносячи і додаючи обидва рядки, отримуємо

$$\begin{aligned}1 &= \frac{1}{\sin^2(2\phi)} \left(\sin^2 \phi \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \cos^2 \phi \left(-\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{\sin^2(2\phi)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 2\frac{xy}{ab} (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi) \right) \\ &= \frac{1}{\sin^2(2\phi)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{xy}{ab} \cos(2\phi) \right).\end{aligned}\quad (2.20)$$

Підсумуємо і розглянемо спеціальні випадки.

1. Щоб $\cos \phi = 0$, фазові кути мають задовольняти $\alpha - \beta = (1 + 2k)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Для цього випадку ?? зводиться до

$$-\frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \quad (2.21)$$

що є просто прямою.

Приклад. Лінійна поляризація.example:polarizationReview:1 Нехай $\alpha = 0$, $\beta = -\pi$; фазор має значення

$$\mathbf{E} = (\hat{\mathbf{x}}a - \hat{\mathbf{y}}b) e^{j\omega t}. \quad (2.22)$$

2. Щоб $\sin \phi = 0$, фазові кути мають задовольняти $\alpha - \beta = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Для цього випадку ?? зводиться до

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \quad (2.23)$$

також просто пряма.

Приклад. Еліптична поляризація.example:polarizationReview:2 Нехай $\alpha = \beta = 0$; фазор має значення

$$\mathbf{E} = (\hat{\mathbf{x}}a + \hat{\mathbf{y}}b) e^{j\omega t}. \quad (2.24)$$

Останній випадок — кругова та еліптична поляризація. Система явно еліптично поляризована, якщо $\cos(2\phi) \neq 0$, або $\alpha - \beta = (\pi/2)(1 + 2k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Якщо до того ж $a = b$, еліпс перетворюється на коло.

Коли умова $\cos(2\phi) = 0$ не виконується, поворот координат

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \mu & \sin \mu \\ -\sin \mu & \cos \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

де

$$\mu = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2 \cos(\alpha - \beta)}{b - a} \right), \quad (2.26)$$

переводить траєкторію у стандартну (але громіздку) конічну форму:

$$1 = \frac{u^2}{ab} \left(\frac{b}{a} \cos^2 \mu + \frac{a}{b} \sin^2 \mu + \frac{1}{2} \sin(2\mu + \alpha - \beta) \right) + \frac{v^2}{ab} \left(\frac{b}{a} \sin^2 \mu + \frac{a}{b} \cos^2 \mu - \frac{1}{2} \sin(2\mu + \alpha - \beta) \right). \quad (2.27)$$

Не очевидно, що коефіцієнти при u^2, v^2 обов'язково додатні (це необхідно, щоб конічна крива була еліпсом, а не гіперболою).

Приклад. Кругова поляризація.example:polarizationReview:n При $a = b = E_0$, $\alpha = 0$, $\beta = \pm\pi/2$ виконуються всі умови кругової поляризації, і фазор має значення

$$\mathbf{E} = E_0 (\hat{\mathbf{x}} \pm j\hat{\mathbf{y}}) e^{j\omega t}. \quad (2.28)$$

2.7. Фазорна потужність.

У §2.13 фазорна потужність записана як

$$I^2 R/2, \quad (2.29)$$

де I, R — модулі фазорів у схемі.

Це співвідношення виражає середню потужність за період частоти фазора:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |\mathbf{V}| \cos(\omega t + \phi_V) |\mathbf{I}| \cos(\omega t + \phi_I) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |\mathbf{V}| |\mathbf{I}| (\cos(\phi_V - \phi_I) + \cos(2\omega t + \phi_V + \phi_I)) dt \\
 &= \frac{1}{2} |\mathbf{V}| |\mathbf{I}| \cos(\phi_V - \phi_I).
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Вводячи імпеданс цього елемента схеми

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Z} &= \frac{|\mathbf{V}| e^{j\phi_V}}{|\mathbf{I}| e^{j\phi_I}} \\
 &= \frac{|\mathbf{V}|}{|\mathbf{I}|} e^{j(\phi_V - \phi_I)},
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

цю середню потужність можна записати у фазорному вигляді

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} |\mathbf{I}|^2 \mathbf{Z}, \tag{2.32}$$

з

$$P = \operatorname{Re} \mathbf{P}. \tag{2.33}$$

Зауважимо, що треба бути обережним і використовувати *модуль* струмового фазора \mathbf{I} , оскільки \mathbf{I}^2 відрізняється за фазою від $|\mathbf{I}|^2$. Це пояснює спряження в означенні комплексної потужності з [?], яке мало вигляд

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{\text{rms}} \mathbf{I}_{\text{rms}}^*. \tag{2.34}$$

2.8. Приклади ефективної площі розсіювання (RCS).

Пласка пластина.

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{4\pi(LW)^2}{\lambda^2}. \tag{2.35}$$

рисунок пропущено: Геометрія квадратної пластини для прикладу RCS.

Сфера. В оптичній границі ефективна площа розсіювання сфери

рисунок пропущено: Геометрія сфери для прикладу RCS.

$$\sigma_{\text{max}} = \pi r^2. \tag{2.36}$$

Зауважимо, що це менше за фізичну площу $4\pi r^2$.

Циліндр.

рисунок пропущено: Геометрія циліндра для прикладу RCS.

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{2\pi r h^2}{\lambda}. \tag{2.37}$$

Тригранний кутовий відбивач (trihedral corner reflector).

рисунок пропущено: Геометрія тригранного кутового відбивача для прикладу RCS.

$$\sigma_{\max} = \frac{4\pi L^4}{3\lambda^2}. \quad (2.38)$$

2.9. Розсіювання на сфері залежно від частоти.

Частотну залежність сферичного розсіювання схематично зображено на ??.

- Низькі частоти (або малі частинки) — режим Релея:

$$\sigma = (\pi r^2) \cdot 7,11(\kappa r)^4, \quad \kappa = 2\pi/\lambda. \quad (2.39)$$

- Розсіювання Мі (резонанс):

$$\sigma_{\max}(A) = 4\pi r^2, \quad (2.40)$$

$$\sigma_{\max}(B) = 0,26 \pi r^2. \quad (2.41)$$

- Оптична границя ($r \gg \lambda$):

$$\sigma = \pi r^2. \quad (2.42)$$

рисунок пропущено: Розсіювання на сфері залежно від частоти (з нотаток проф. Eleftheriades).

2.10. EIRP (ефективна ізотропна випромінювана потужність).

Проф. Eleftheriades вводить термін EIRP — *Effective Isotropic Radiated Power* (ефективна ізотропна випромінювана потужність), добуток потужності та підсилення $P_t G_t$, вимірюється у ватах (W).

2.11. Імпеданс вільного простору.

На лекціях бачили

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}, \quad (2.43)$$

виражене як $120\pi \approx 377$. Здавалось дивним, що це точне значення. З

- $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$ (значення з [?]),
- $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ (точно),

чисельне значення η/π дорівнює 119,945, що близько до 120. У [?] зазначено, що це просто наслідок використання $c = 3 \times 10^8 \text{ м/с}$.

Це видно, якщо записати η в альтернативній формі:

$$\begin{aligned}
 \eta &= \frac{1}{c\epsilon_0} \\
 &= \mu_0 c \\
 &= (4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2)(3 \times 10^8 \text{ м/с}) \\
 &= 120\pi \text{ N} \cdot \text{м/A}^2 \cdot \text{с} \\
 &= 120\pi \Omega.
 \end{aligned} \quad (2.44)$$

2.12. Позначення.

- **Середнє за часом.** І проф. Eleftheriades, і підручник [?] використовують квадратні дужки $\langle \dots \rangle$ для середніх за часом, а не кутові $\langle \dots \rangle$. Можливо, це інженерна угода.
- **Жирні вектори** зазвичай позначають фазори, а жирні *каліграфічні* — поля в часовій області. Наприклад: $\mathbf{E}(x, y, z, t) = \hat{\mathbf{e}}E(x, y)e^{j(\omega t - kz)}$, $\mathbf{E}(x, y, z, t) = \text{Re } \mathbf{E}$.

3. Лінійні дротові антени

3.1. Магнітний векторний потенціал.

Символ **A** називали магнітним векторним потенціалом (Magnetic Vector Potential) на лекціях та у задачах. У моїй пам'яті ми колись називали його просто векторним потенціалом. Префіксувати його як “магнітний” видавалось мені контрінтуїтивним, бо генерується він *електричними* джерелами (зарядами і струмами). Цю термінологію можна виправдати тим, що **A** породжує магнітне поле своїм ротором. Згадку можна знайти в [?], де також вказано, що електричним потенціалом називають скаляр ϕ .

Проф. Eleftheriades зазначає, що термін електричний векторний потенціал стосується векторного потенціалу **F**, породженого магнітними джерелами (бо в такому випадку електричне поле породжується ротором **F**).

3.2. Графіки радіальної залежності нескінченно малого диполя.

У §4.2 з [?] обговорено радіальну залежність полів і потужності розв'язку для системи нескінченно малого диполя для $kr < 1$, $kr = 1$ і $kr > 1$. Тут наведено графіки цих kr -залежностей разом з опорним контуром $kr = 1$. Уся θ -залежність та масштабування опущено.

Інтерактивний CDF-файл `visualizeDipoleFields.cdf` доступний для інтерактивних графіків, обертання та зміни діапазонів.

Графіки дійсної та уявної частин

$$\begin{aligned} H_\phi &= \frac{jk}{r} e^{-jkr} \left(1 - \frac{j}{kr} \right) \\ E_r &= \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{j}{kr} \right) e^{-jkr} \\ E_\theta &= \frac{jk}{r} \left(1 - \frac{j}{kr} - \frac{1}{k^2 r^2} \right) e^{-jkr} \end{aligned} \quad (3.1)$$

можна знайти на рис. ??, ??, та ?? відповідно.

рисунки пропущено: Радіальна залежність $\text{Re } H_\phi$ та $\text{Im } H_\phi$.

рисунки пропущено: Радіальна залежність $\text{Re } E_r$ та $\text{Im } E_r$.

рисунки пропущено: Радіальна залежність $\text{Re } E_\theta$ та $\text{Im } E_\theta$.

3.3. Електричне поле в дальній зоні для сферичного потенціалу.

Цікаво поглянути на електричне поле в дальній зоні, асоційоване з довільним сферичним магнітним векторним потенціалом, припускаючи, що вся радіальна

залежність міститься у сферичній огорожі (envelope). Тобто

$$\mathbf{A} = \frac{e^{-jkr}}{r} \left(\hat{\mathbf{r}}a_r(\theta, \phi) + \hat{\boldsymbol{\theta}}a_\theta(\theta, \phi) + \hat{\boldsymbol{\phi}}a_\phi(\theta, \phi) \right). \quad (3.2)$$

Електричне поле задається як

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - j\frac{1}{\omega\mu_0\epsilon_0}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}). \quad (3.3)$$

Дивергенція та градієнт у сферичних координатах:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}, \quad (3.4a)$$

$$\nabla \psi = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}. \quad (3.4b)$$

Для заданого потенціалу дивергенція:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{a_r}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{e^{-jkr}}{r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta a_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} \\ &= a_r e^{-jkr} \left(\frac{1}{r^2} - jk \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} e^{-jkr} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta a_\theta) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} e^{-jkr} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} \\ &\approx -jk \frac{a_r}{r} e^{-jkr}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

В останньому наближенні відкинуто всі члени $1/r^2$, малі порівняно з $1/r$ -внеском, що домінує при $r \rightarrow \infty$ (дальня зона).

Тепер можна обчислити градієнт:

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) &\approx -jk \nabla \left(\frac{a_r}{r} e^{-jkr} \right) \\ &= -jk \left(\hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \frac{a_r}{r} e^{-jkr} \\ &= -jk \left(\hat{\mathbf{r}} a_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} e^{-jkr} \right) + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r^2} e^{-jkr} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} + e^{-jkr} \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \phi} \right) \\ &= -jk \left(-\hat{\mathbf{r}} \frac{a_r}{r^2} (1 + jkr) + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r^2} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \phi} \right) e^{-jkr} \approx -k^2 \hat{\mathbf{r}} \frac{a_r}{r} e^{-jkr}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Знову застосовано наближення дальньої зони, що скасовує всі члени $1/r^2$.

Тепер можливе наближення електричного поля в дальній зоні:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -j\omega\mathbf{A} - j\frac{1}{\omega\mu_0\epsilon_0}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \\ &= -j\omega \frac{e^{-jkr}}{r} \left(\hat{\mathbf{r}}a_r(\theta, \phi) + \hat{\boldsymbol{\theta}}a_\theta(\theta, \phi) + \hat{\boldsymbol{\phi}}a_\phi(\theta, \phi) \right) + j\frac{1}{\omega\mu_0\epsilon_0} k^2 \hat{\mathbf{r}} \frac{a_r}{r} e^{-jkr} \\ &= -j\omega \frac{e^{-jkr}}{r} \left(\hat{\mathbf{r}}a_r(\theta, \phi) + \hat{\boldsymbol{\theta}}a_\theta(\theta, \phi) + \hat{\boldsymbol{\phi}}a_\phi(\theta, \phi) \right) + j\frac{c^2}{\omega} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \hat{\mathbf{r}} \frac{a_r}{r} e^{-jkr} \\ &= -j\omega \frac{e^{-jkr}}{r} \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}a_\theta(\theta, \phi) + \hat{\boldsymbol{\phi}}a_\phi(\theta, \phi) \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Зверніть увагу на дещо “чудесне” взаємне скорочення всіх радіальних компонент поля. Якщо \mathbf{A}_T — нерадіальна проекція \mathbf{A} , то електричне поле в дальній зоні просто

$$\mathbf{E}_{ff} = -j\omega\mathbf{A}_T. \quad (3.8)$$

3.4. Магнітне поле в дальній зоні для сферичного потенціалу.

Застосування того самого припущення представлення для магнітного поля дає

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\
&= \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r \sin \theta} \partial_\theta (A_\phi \sin \theta) + \frac{\hat{\theta}}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi A_r - \partial_r (r A_\phi) \right) \\
&\quad + \frac{\hat{\phi}}{r} (\partial_r (r A_\theta) - \partial_\theta A_r) \\
&= \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r \sin \theta} \partial_\theta \left(\frac{e^{-jkr}}{r} a_\phi \sin \theta \right) + \frac{\hat{\theta}}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi \left(\frac{e^{-jkr}}{r} a_r \right) - \partial_r \left(r \frac{e^{-jkr}}{r} a_\phi \right) \right) \\
&\quad + \frac{\hat{\phi}}{r} \left(\partial_r \left(r \frac{e^{-jkr}}{r} a_\theta \right) - \partial_\theta \left(\frac{e^{-jkr}}{r} a_r \right) \right) \\
&= \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r \sin \theta} \frac{e^{-jkr}}{r} \partial_\theta (a_\phi \sin \theta) + \frac{\hat{\theta}}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{e^{-jkr}}{r} \partial_\phi a_r - \partial_r (e^{-jkr}) a_\phi \right) \\
&\quad + \frac{\hat{\phi}}{r} \left(\partial_r (e^{-jkr}) a_\theta - \frac{e^{-jkr}}{r} \partial_\theta a_r \right) \\
&\approx jk \left(\hat{\theta} a_\phi - \hat{\phi} a_\theta \right) \frac{e^{-jkr}}{r} \\
&= -jk \hat{\mathbf{r}} \times \left(\hat{\theta} a_\theta + \hat{\phi} a_\phi \right) \frac{e^{-jkr}}{r} \\
&= \frac{1}{c} \mathbf{E}_{\text{ff}}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Наведене наближення відкидає члени $1/r^2$. Оскільки

$$\frac{1}{\mu_0 c} = \frac{1}{\mu_0} \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = \frac{1}{\eta}, \tag{3.10}$$

магнітне поле в дальній зоні можна виразити через електричне поле дальньої зони:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}. \tag{3.11}$$

3.5. Співвідношення між електричним і магнітним полями плоскої хвилі.

Я пам'ятав тотожність виду ?? у [?], але не думав, що вона вимагає наближення дальньої зони. Причина в тому, що в Джексона ця тотожність припускає *плоскохвильове* представлення поля — а саме це локально вимагають і припущення дальньої зони.

Припускаючи плоскохвильове представлення для обох полів:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E} e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}, \tag{3.12a}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B} e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}. \tag{3.12b}$$

Співвідношення векторного добутку між полями впливає з закону індукції Максвелла-Фарадея:

$$0 = \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{3.13}$$

тобто

$$\begin{aligned}
 0 &= \mathbf{e}_r \times \mathbf{E} \partial_r e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + j\omega \mathbf{B} e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \\
 &= -j\mathbf{e}_r k_r \times \mathbf{E} e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + j\omega \mathbf{B} e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \\
 &= (-\mathbf{k} \times \mathbf{E} + \omega \mathbf{B}) j e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})},
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

звідки

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H} &= \frac{k}{kc\mu_0} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \\
 &= \frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E},
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

що також дає ??, але з набагато меншою роботою і без зайвої плутанини.

3.6. Виключно поперечний характер полів дальньої зони.

Також помітимо: те, що поля дальньої зони мають лише поперечні компоненти, можна побачити тим самим аргументом, що локально на цій відстані ці поля — плоскі хвилі. Плоскі хвилі повинні задовольняти рівняння Максвелла з нульовою дивергенцією:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \tag{3.16a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{3.16b}$$

тож за тим самим міркуванням

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0, \tag{3.17a}$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{3.17b}$$

У дальній зоні електричне поле має дорівнювати своїй поперечній проекції:

$$\mathbf{E} = \text{пр}_T \left(-j\omega \mathbf{A} - j \frac{1}{\omega \mu_0 \epsilon_0} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \right). \tag{3.18}$$

Оскільки за ?? член, пов'язаний зі скалярним потенціалом, має лише радіальну компоненту, залишається

$$\mathbf{E} = -j\omega \text{пр}_T \mathbf{A}, \tag{3.19}$$

що дає ?? з трохи меншою роботою.

4. Поляризація і взаємність

Демонстрація геометрії. Огляньмо, як загальний поляризований фазор поля приводить до лінійної, кругової та еліптичної геометрії.

Найзагальніше поле, поляризоване в площині x, y , має вигляд

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= (\hat{\mathbf{x}}a e^{j\alpha} + \hat{\mathbf{y}}b e^{j\beta}) e^{j(\omega t - kz)} \\ &= (\hat{\mathbf{x}}a e^{j(\alpha-\beta)/2} + \hat{\mathbf{y}}b e^{j(\beta-\alpha)/2}) e^{j(\omega t - kz + (\alpha+\beta)/2)}.\end{aligned}\quad (4.1)$$

Винесення середнього фазового кута допомагає (інакше вирази стають громіздкими).

Нехай $\mathbf{E} = \text{Re } \mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}}x + \hat{\mathbf{y}}y$, $\theta = \omega t + (\alpha + \beta)/2$, $\phi = (\alpha - \beta)/2$, тоді

$$\mathbf{E} = (\hat{\mathbf{x}}a e^{j\phi} + \hat{\mathbf{y}}b e^{-j\phi}) e^{j\theta}. \quad (4.2)$$

Координати тепер зчитуються прямо:

$$\frac{x}{a} = \cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \theta, \quad (4.3a)$$

$$\frac{y}{b} = \cos \phi \sin \theta + \sin \phi \cos \theta, \quad (4.3b)$$

або в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} x/a \\ y/b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Мета — усунути всі залежності від θ (тобто від часу), перетворивши параметричне співвідношення на конічну форму. Якщо припустити, що ні $\cos \theta$, ні $\sin \theta$ не дорівнюють нулю (ці випадки спеціальні й ведуть до лінійної поляризації), то інвертування матриці дозволяє усунути залежність від θ :

$$\frac{1}{\sin(2\phi)} \begin{bmatrix} \sin \phi & \sin \phi \\ -\cos \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x/a \\ y/b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Підносячи і додаючи обидва рядки, отримуємо

$$\begin{aligned}1 &= \frac{1}{\sin^2(2\phi)} \left(\sin^2 \phi \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \cos^2 \phi \left(-\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{\sin^2(2\phi)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 2 \frac{xy}{ab} (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi) \right) \\ &= \frac{1}{\sin^2(2\phi)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{xy}{ab} \cos(2\phi) \right).\end{aligned}\quad (4.6)$$

Підсумуємо і розглянемо спеціальні випадки.

1. Щоб $\cos \phi = 0$, фазові кути мають задовольняти $\alpha - \beta = (1 + 2k)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Для цього випадку ?? зводиться до

$$-\frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \quad (4.7)$$

що є просто прямою.

Приклад. Лінійна поляризація.example:polarizationReview:1 Нехай $\alpha = 0$, $\beta = -\pi$; фазор має значення

$$\mathbf{E} = (\hat{\mathbf{x}}a - \hat{\mathbf{y}}b) e^{j\omega t}. \quad (4.8)$$

2. Щоб $\sin \phi = 0$, фазові кути мають задовольняти $\alpha - \beta = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Для цього випадку ?? зводиться до

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \quad (4.9)$$

також просто пряма.

Приклад. Еліптична поляризація.example:polarizationReview:2 Нехай $\alpha = \beta = 0$; фазор має значення

$$\mathbf{E} = (\hat{\mathbf{x}}a + \hat{\mathbf{y}}b) e^{j\omega t}. \quad (4.10)$$

Останній випадок — кругова та еліптична поляризація. Система явно еліптично поляризована, якщо $\cos(2\phi) \neq 0$, або $\alpha - \beta = (\pi/2)(1 + 2k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Якщо до того ж $a = b$, еліпс перетворюється на коло.

Коли умова $\cos(2\phi) = 0$ не виконується, поворот координат

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \mu & \sin \mu \\ -\sin \mu & \cos \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

де

$$\mu = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2 \cos(\alpha - \beta)}{b - a} \right), \quad (4.12)$$

переводить траєкторію у стандартну (але громіздку) конічну форму:

$$1 = \frac{u^2}{ab} \left(\frac{b}{a} \cos^2 \mu + \frac{a}{b} \sin^2 \mu + \frac{1}{2} \sin(2\mu + \alpha - \beta) \right) + \frac{v^2}{ab} \left(\frac{b}{a} \sin^2 \mu + \frac{a}{b} \cos^2 \mu - \frac{1}{2} \sin(2\mu + \alpha - \beta) \right). \quad (4.13)$$

Не очевидно, що коефіцієнти при u^2, v^2 обов'язково додатні (це необхідно, щоб конічна крива була еліпсом, а не гіперболою).

Приклад. Кругова поляризація.example:polarizationReview:n При $a = b = E_0$, $\alpha = 0$, $\beta = \pm\pi/2$ виконуються всі умови кругової поляризації, і фазор має значення

$$\mathbf{E} = E_0 (\hat{\mathbf{x}} \pm j\hat{\mathbf{y}}) e^{j\omega t}. \quad (4.14)$$

4.1. Теорема взаємності (reciprocity theorem).

На лекціях було подано вивід теореми взаємності — теореми, що містила інтеграл

$$\int \left(\mathbf{E}^{(a)} \times \mathbf{H}^{(b)} - \mathbf{E}^{(b)} \times \mathbf{H}^{(a)} \right) \cdot d\mathbf{S} = \dots \quad (4.15)$$

по поверхні, де права частина — об'ємний інтеграл, що містить поля та (електричні й магнітні) струмові джерела. Ідея — розглянути дві різні конфігурації джерельного навантаження тієї самої системи й показати, що поля та джерела у цих двох конфігураціях можна пов'язати.

Щоб отримати потрібний результат, простий спосіб — подивитися на дивергенцію різниці добуток векторного типу. Для цього потрібна фазорна форма двох роторних рівнянь Максвелла:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -(\mathbf{M} + j\omega\mu_0\mathbf{H}) \quad (4.16a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\epsilon_0\mathbf{E}, \quad (4.16b)$$

тож дивергенція така:

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot (\mathbf{E}^{(a)} \times \mathbf{H}^{(b)} - \mathbf{E}^{(b)} \times \mathbf{H}^{(a)}) \\ &= \mathbf{H}^{(b)} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}^{(a)}) - \mathbf{E}^{(a)} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}^{(b)}) \\ & \quad - \mathbf{H}^{(a)} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}^{(b)}) + \mathbf{E}^{(b)} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}^{(a)}) \\ &= -\mathbf{H}^{(b)} \cdot (\mathbf{M}^{(a)} + j\omega\mu_0\mathbf{H}^{(a)}) - \mathbf{E}^{(a)} \cdot (\mathbf{J}^{(b)} + j\omega\epsilon_0\mathbf{E}^{(b)}) \\ & \quad + \mathbf{H}^{(a)} \cdot (\mathbf{M}^{(b)} + j\omega\mu_0\mathbf{H}^{(b)}) + \mathbf{E}^{(b)} \cdot (\mathbf{J}^{(a)} + j\omega\epsilon_0\mathbf{E}^{(a)}). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Нечлени-джерела взаємно скорочуються, залишаючи

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot (\mathbf{E}^{(a)} \times \mathbf{H}^{(b)} - \mathbf{E}^{(b)} \times \mathbf{H}^{(a)}) \\ &= -\mathbf{H}^{(b)} \cdot \mathbf{M}^{(a)} - \mathbf{E}^{(a)} \cdot \mathbf{J}^{(b)} + \mathbf{H}^{(a)} \cdot \mathbf{M}^{(b)} + \mathbf{E}^{(b)} \cdot \mathbf{J}^{(a)}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Чи маємо ми дивуватися такому співвідношенню? Ймовірно, ні — оскільки співвідношення енергії-імпульсу між полями та струмами одного джерела має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\epsilon_0}{2} (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2) + \nabla \cdot \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}, \quad (4.19)$$

(тут без магнітних джерел).

Це спочатку нашою думку, що теорему взаємності можна сформулювати загальніше через тензор енергії-імпульсу. Однак є тонкі відмінності, оскільки часовий добуток у часовій області призводить до середніх через дійсні частини спряжених пар: $\mathbf{E} \times \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{E} \times \mathbf{B}^*$ та $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^*$.

Інтегральна форма у дальній зоні. Застосовуючи теорему дивергенції над сферою, наведена тотожність набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \int_S (\mathbf{E}^{(a)} \times \mathbf{H}^{(b)} - \mathbf{E}^{(b)} \times \mathbf{H}^{(a)}) \cdot \hat{\mathbf{r}} dS \\ &= \int_V (-\mathbf{H}^{(b)} \cdot \mathbf{M}^{(a)} - \mathbf{E}^{(a)} \cdot \mathbf{J}^{(b)} + \mathbf{H}^{(a)} \cdot \mathbf{M}^{(b)} + \mathbf{E}^{(b)} \cdot \mathbf{J}^{(a)}) dV. \end{aligned} \quad (4.20)$$

У дальній зоні векторні добуток строго радіальні. Цей поверхневий інтеграл

можна записати як

$$\begin{aligned}
& \int_S \left(\mathbf{E}^{(a)} \times \mathbf{H}^{(b)} - \mathbf{E}^{(b)} \times \mathbf{H}^{(a)} \right) \cdot \hat{\mathbf{r}} dS \\
&= \frac{1}{\mu_0} \int_S \left(\mathbf{E}^{(a)} \times \left(\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}^{(b)} \right) - \mathbf{E}^{(b)} \times \left(\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}^{(a)} \right) \right) \cdot \hat{\mathbf{r}} dS \\
&= \frac{1}{\mu_0} \int_S \left(\mathbf{E}^{(a)} \cdot \mathbf{E}^{(b)} - \mathbf{E}^{(b)} \cdot \mathbf{E}^{(a)} \right) dS \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

У наведених розкладах було використано ?? для розкриття виразів виду

$$(\mathbf{A} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{C})) \cdot \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} - (\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{r}}), \tag{4.22}$$

з яких залишається лише перший скалярний добуток через поперечну природу полів дальньої зони.

Тому у дальній зоні маємо пряме співвідношення між полями та джерелами двох джерельних конфігурацій тієї самої системи виду

$$\int_V \left(\mathbf{H}^{(a)} \cdot \mathbf{M}^{(b)} + \mathbf{E}^{(b)} \cdot \mathbf{J}^{(a)} \right) dV = \int_V \left(\mathbf{H}^{(b)} \cdot \mathbf{M}^{(a)} + \mathbf{E}^{(a)} \cdot \mathbf{J}^{(b)} \right) dV. \tag{4.23}$$

Застосування до теорії антен. Це фундаментальна причина того, що ми можемо ставити задачу про те, що може *приймати* антена, в термінах того, що антена може *передавати*.

Проф. Eleftheriades пояснив еквівалентність передача-приймання через концепції двопортової мережі ([?], [?]).

Альтернативне й дуже інтуїтивне пояснення можна знайти в додатку А.1 [?], де густини струмів та скалярні струми безпосередньо пов'язано з напругами у цих областях через інтегральне представлення теореми взаємності.

Тотожності.

Лема. Дивергенція векторного добутку $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$.

Доведення.

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \partial_a \epsilon_{abc} A_b B_c \\
&= \epsilon_{abc} (\partial_a A_b) B_c - \epsilon_{bac} A_b (\partial_a B_c) \\
&= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}).
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Лема. Скалярний добуток подвійного векторного добутку $(\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})) \cdot \mathbf{D} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{C} \cdot \mathbf{D})$.

Доведення.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})) \cdot \mathbf{D} &= \epsilon_{abc} A_b \epsilon_{rsc} B_r C_s D_a \\
&= \delta_{[ab]}^{rs} A_b B_r C_s D_a \\
&= A_s B_r C_s D_r - A_r B_r C_s D_s \\
&= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}).
\end{aligned} \tag{4.25}$$

5. Математичний додаток: поліноми Чебишева

5.1. Поліноми Чебишева.

Свого часу (на 2-му курсі) поліноми Чебишева справили на мене велике враження при проектуванні фільтрів нижніх частот. Я використовував чебишевські фільтри в апаратурі для системи розпізнавання мови, що її будувала наша група в навчальній лабораторії. Одна з переваг цих поліномів — коливання в інтервалі $|x| < 1$ суворо обмежене. Ця сама властивість, а також необмежений характер поза інтервалом $[-1, 1]$, має застосування у проектуванні антенних решіток.

Поліноми Чебишева визначено як

$$T_m(x) = \cos(m \cos^{-1} x), \quad |x| < 1, \quad (5.1a)$$

$$T_m(x) = \cosh(m \cosh^{-1} x), \quad |x| > 1. \quad (5.1b)$$

Обмеження області та гіперболічна форма. У нотатках проф. Eleftheriades підкреслено визначення в інтервалі $|x| > 1$, але це може розглядатися як *наслідок*, а не означення, якщо зняти обмеження області. Наприклад, нехай $x = 7$, і покладемо

$$\cos^{-1} 7 = \theta, \quad (5.2)$$

тоді

$$\begin{aligned} 7 &= \cos \theta \\ &= \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \\ &= \cosh(\pm j\theta), \end{aligned} \quad (5.3)$$

тобто

$$\mp j \cosh^{-1} 7 = \theta. \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} T_m(7) &= \cos(\mp m j \cosh^{-1} 7) \\ &= \cosh(m \cosh^{-1} 7). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Той самий аргумент очевидно застосовний до будь-якого іншого значення поза областю $|x| < 1$, тож без жодних обмежень ці поліноми можна визначити просто як

$$T_m(x) = \cos(m \cos^{-1} x). \quad (5.6)$$

Поліноміальний характер. ?? не виглядає очевидно поліномом. Перевіримо поліноміальний характер для перших значень m .

- $m = 0$:

$$T_0(x) = \cos(0 \cdot \cos^{-1} x) = \cos(0) = 1. \quad (5.7)$$

- $m = 1$:

$$T_1(x) = \cos(1 \cdot \cos^{-1} x) = x. \quad (5.8)$$

- $m = 2$:

$$\begin{aligned} T_2(x) &= \cos(2 \cos^{-1} x) \\ &= 2 \cos^2(\cos^{-1} x) - 1 \\ &= 2x^2 - 1. \end{aligned} \quad (5.9)$$

У загальному випадку:

$$\begin{aligned} T_m(x) &= \cos(m \cos^{-1} x) \\ &= \operatorname{Re} e^{jm \cos^{-1} x} \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{j \cos^{-1} x} \right)^m \\ &= \operatorname{Re} \left(\cos \cos^{-1} x + j \sin \cos^{-1} x \right)^m \\ &= \operatorname{Re} \left(x + j \sqrt{1-x^2} \right)^m \\ &= \operatorname{Re} \left(x^m + \binom{m}{1} j x^{m-1} (1-x^2)^{1/2} - \binom{m}{2} x^{m-2} (1-x^2)^{2/2} \right. \\ &\quad \left. - \binom{m}{3} j x^{m-3} (1-x^2)^{3/2} + \binom{m}{4} x^{m-4} (1-x^2)^{4/2} + \dots \right) \\ &= x^m - \binom{m}{2} x^{m-2} (1-x^2) + \binom{m}{4} x^{m-4} (1-x^2)^2 - \dots \end{aligned} \quad (5.10)$$

Це розкладання було дещо недбалим щодо знаків членів $\sin \cos^{-1} x = \sqrt{1-x^2}$, оскільки знак мінус слід обирати для кореня при $x \in [-1, 0]$. Однак це не має значення наприкінці, бо операція виділення дійсної частини обирає лише парні степені цього кореня.

Кінцевий результат розкладу можна записати як

$$T_m(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \binom{m}{2k} (-1)^k x^{m-2k} (1-x^2)^k. \quad (5.11)$$

Це чітко показує поліноміальну природу цих функцій і також коректно визначене для будь-якого значення x . У цьому розкладі також явно видно парне/непарне чергування з m .

Кілька графіків. Перші кілька поліномів зображено на ??.

Властивості. У [?] наведено такі властивості:

$$T_m(x) = 2xT_{m-1}(x) - T_{m-2}(x), \quad (\text{рекурентне співвідношення}) \quad (5.12a)$$

$$0 = (1-x^2) \frac{dT_m(x)}{dx} + mxT_m(x) - mT_{m-1}(x), \quad (5.12b)$$

$$0 = (1-x^2) \frac{d^2T_m(x)}{dx^2} - x \frac{dT_m(x)}{dx} + m^2T_m(x), \quad (\text{ОДУ Чебишева}) \quad (5.12c)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_m(x) T_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{якщо } m \neq n, \\ \pi & \text{якщо } m = n = 0, \\ \pi/2 & \text{якщо } m = n, m \neq 0 \end{cases} \quad (5.12d)$$

(ортогональність з вагою $1/\sqrt{1-x^2}$)

Застосування до синтезу антенних решіток. У теорії антенних решіток рівнобічне поводження Чебишева у смузі $|x| < 1$ і експоненціальне зростання поза нею використовується для проектування *решіток Дольфа-Чебишева* (Dolph-Chebyshev arrays). Такі решітки мінімізують рівень бокових пелюсток (sidelobes) при заданій ширині головного променя — або, еквівалентно, дають найвузькіший головний промінь при заданому рівні бічних пелюсток. Розглядається поліном порядку $N - 1$ для решітки з N елементів, нормуючи рівень бокових пелюсток через значення $T_{N-1}(x_0)$, де $x_0 > 1$ — параметр поза смугою.